

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННЫХ

Владимир Гаврилович Романов¹

Татьяна Владимировна Бугуева²

^{1,2}Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

²Новосибирский государственный университет

Новосибирск, Россия,

¹romanov@math.nsc.ru

²bugueva@math.nsc.ru

Аннотация

Рассматривается обратная задача определения коэффициента $q(x, t)$ волнового уравнения $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - q(x, t)u^{\gamma+1} = 0$, когда $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$, $\gamma \geq 0$. Изучены свойства решения прямой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения прямой задачи. Для обратной задачи доказана теорема о локальном существовании её решения и получена глобальная оценка устойчивости её решения.

Ключевые слова и фразы

Обратная задача, локальное существование, глобальная устойчивость, степенная нелинейность.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект FWNF-2026-0029)

Для цитирования

Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для волнового уравнения со степенной нелинейностью и потенциалом, зависящим от пространственной и временной переменных // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 226-254. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-226-254

The inverse problem for a wave equation with a power law nonlinearity and a potential depending on spatial and temporary variables

Vladimir G. Romanov¹, Tatiana V. Bugueva²

^{1,2}Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,

²Novosibirsk State University,

Novosibirsk, Russia

¹romanov@math.nsc.ru, ²bugueva@math.nsc.ru

Abstract

The inverse problem of determining the coefficient $q(x, t)$ of the wave equation $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - q(x, t)u^{\gamma+1} = 0$ is considered when $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$, $\gamma \geq 0$. The properties of a solution of a direct problem are studied and an existence and uniqueness theorem is proved. For the inverse problem a local existence theorem is stated and a global stability estimates is found.

Keywords

Inverse problem, local existence, global stability, power nonlinearity.

Funding

The work is done within framework of state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project FWNF-2026-0029)

For citation

Romanov V. G., Bugueva T. V., The inverse problem for a wave equation with a power-law nonlinearity and a potential depending on spatial and temporary variables // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 226-254. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-226-254

§ 1. Введение и постановки задач

Обратные задачи для дифференциальных уравнений об определении коэффициентов зависящих от временной и пространственных переменных мало изучены. В известных авторам публикациях рассматривались коэффициенты, в которых пространственная переменная является многомерной.

Так, в работе [1] доказывается теорема единственности решения обратной задачи для волнового уравнения $\partial_t^2 u - \Delta_x u + q(t, \mathbf{x})u = 0$, где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, n — нечётное, $n \geq 3$. В работах [2], [3] рассматриваются различные постановки обратных задач определения коэффициента $q(t, \mathbf{x})$ того

же волнового уравнения для $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $T > 0$. Установлены теоремы единственности. В работе [3] получена оценка устойчивости при $n = 2$. В работах [4] и [5] изучались вопросы единственности решения обратных задач в предположении, что задано отображение, переводящее данные Дирихле краевой задачи в данные Неймана. В работах [6] и [7] изучаются вопросы визуализации движущихся объектов в случайных средах. Близкими к этому направлению являются также работы [8], [9] для турбулентных сред.

В работе [10] для трёхмерного пространства рассматривается обратная задача определения коэффициента $a(\mathbf{x}, t)$, входящего в волновое уравнение $u_{tt} = \Delta u + a(\mathbf{x}, t)u + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, для неё построен глобально сходящийся численный метод Клибанова, под названием «convexification» и приведены результаты численных экспериментов.

В работах [11]–[14] полагается $n > 2$. В [11] доказывается устойчивость решения обратной задачи определения потенциала $q(t, \mathbf{x})$ волнового уравнения для случая $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. В [12, 13] исследуются обратные задачи определения демпфирующего коэффициента $a(\mathbf{x}, t)$ и потенциала $q(t, \mathbf{x})$ в волновом уравнении в компактном римановом многообразии размерности три или выше. Доказаны теоремы единственности решения обратных задач. В [14] доказывается единственность решения обратной задачи определения коэффициента $a(\mathbf{x}, t)$, входящего в диссипативное волновое уравнение.

В [15] исследована обратная задача определения потенциала $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^+$, когда данные обратной задачи зависят от переменного параметра s , определяющего момент приложения точечного источника. Доказана теорема о локальном существовании решения обратной задачи и получена глобальная оценка устойчивости её решения.

В настоящей работе изучается обратная задача нахождения потенциала $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^+$, волнового уравнения со степенной нелинейностью, данные обратной задачи зависят от переменного параметра s . В разд. 2 изучается прямая задача, свойства гладкости её решения. Затем, в разд. 3 рассматривается обратная задача, устанавливается её однозначная локальная разрешимость и находится глобальная оценка устойчивости решения.

Нам не известны работы других авторов по определению потенциала, зависящего от времени, когда пространственная переменная является одномерной. В то же время, полученные в данной статье результаты не следуют из известных нам публикаций.

Пусть T — фиксированное положительное число.

Прямая задача. При фиксированном $s \in [0, T]$ найти функцию $u(x, t, s)$,

удовлетворяющую соотношениям

$$u_{tt} - u_{xx} - q(x, t)u^{\gamma+1} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = H(t-s), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где $\gamma > 0$; $q(x, t)$ — непрерывная функция аргументов x и t ; $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $s \in [0, T]$ — параметр задачи.

Обратная задача. Пусть $f(t, s)$ — заданная функция при $0 \leq s \leq t \leq T$. Требуется найти функцию $q(x, t)$ в области $G_T = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$ по заданной информации о решении задачи (1)–(3):

$$\begin{aligned} u_x(0, t, s) &= f(t, s) \quad \text{для} \quad (t, s) \in G_0(T), \\ G_0(T) &= \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}. \end{aligned} \quad (4)$$

§ 2. Исследование прямой задачи

Очевидно, что $u(x, t, s) = 0$ в области $\{(x, t) \mid x \geq 0, t < s + x\}$. Рассмотрим область $G(T, s) = \{(x, t) \mid s + x \leq t \leq T - x\}$.

Решение прямой задачи в области $G(T, s)$ эквивалентно решению уравнения

$$u(x, t, s) = 1 + \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad (5)$$

где $D(x, t, s)$ —прямоугольник, ограниченный прямыми: $\tau + \xi = x + t$, $\tau + \xi = t - x$, $\tau - \xi = t - x$, $\tau - \xi = s$.

Пусть $(x, t) \in G(T, s)$. Обозначим $S(\tau, x, t, s) = \{\xi \mid (\xi, \tau) \in D(x, t, s), \tau = \text{const}\}$ — сечение области $D(x, t, s)$ прямой $\tau = \text{const}$, $(t + s - x)/2 \leq \tau \leq t$; $\text{meas}_\xi S(\tau, x, t, s)$ — длина отрезка, пересекающего область $D(x, t, s)$ при фиксированном τ . Тогда следующая оценка:

$$\max_\tau \left\{ \text{meas}_\xi S(\tau, x, t, s) \right\} = \frac{t - s + x}{2} \leq \frac{T - s}{2} \leq \frac{T}{2} \quad (6)$$

справедлива для обоих случаев: $t - x \leq (t + x + s)/2$ и $(t + x + s)/2 \leq t - x$ (см. рис. 1):

Запишем уравнение (5) следующим образом:

$$u(x, t, s) = 1 + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t, s)} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (7)$$

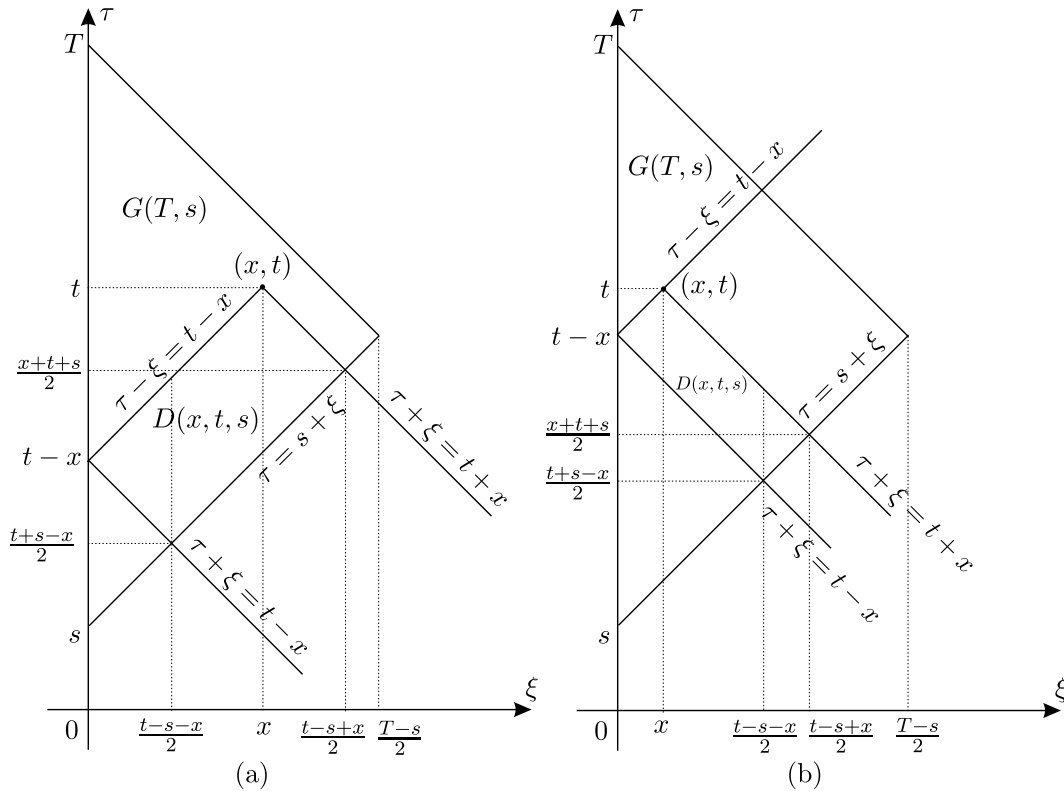


Рис. 1: Геометрия области интегрирования:
 (a) $t - x \leq (t + x + s)/2$, (b) $(t + x + s)/2 \leq t - x$

Обозначим $Q = \|q\|_{C(G(T,s))}$.

Лемма 1. Пусть выполнено неравенство

$$\frac{QT^2\gamma}{4} \leq 1 - 2^{-\gamma}, \quad (8)$$

и в области $G(T, s)$ существует непрерывное решение уравнения (7). Тогда это решение удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq 2 - \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(t-s)\right)^{-1/\gamma} \leq u(x, t, s) \leq \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(t-s)\right)^{-1/\gamma} \leq 2, \quad (x, t) \in G(T, s). \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим

$$z(t, s) = \max_{x \in [0, T-t]} |u(x, t, s)|, \quad \text{если } t \in [(T+s)/2, T],$$

$$z(t, s) = \max_{x \in [0, t-s]} |u(x, t, s)|, \quad \text{если } t \in [s, (T+s)/2].$$

Тогда из уравнения (7) следует неравенство

$$z(t, s) \leq 1 + \frac{QT}{4} \int_s^t z^{1+\gamma}(\tau, s) d\tau. \quad (10)$$

Пусть

$$\eta(t, s) = \frac{QT}{4} \int_s^t z^{1+\gamma}(\tau, s) d\tau.$$

Из уравнения (10) получаем, что

$$z(t, s) \leq 1 + \eta(t, s),$$

и соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(t, s)}{\partial t} &= \frac{QT}{4} z^{1+\gamma}(t, s) \leq \frac{QT}{4} (1 + \eta(t, s))^{1+\gamma}, \quad t > s, \\ \eta|_{t=s} &= 0. \end{aligned}$$

Решая полученное неравенство, получаем оценку

$$\eta(t, s) \leq -1 + \left(1 - \frac{QT\gamma}{4} (t - s)\right)^{-1/\gamma}, \quad t \in [s, T].$$

Условие (8) гарантирует, что

$$\left(1 - \frac{QT\gamma}{4} (t - s)\right)^{-1/\gamma} \leq 2, \quad t \in [s, T].$$

В то же время, из принятых ранее обозначений следуют соотношения

$$\begin{aligned} 2 - \left(1 - \frac{QT\gamma}{4} (t - s)\right)^{-1/\gamma} &\leq 1 - \eta(t, s) \leq u(x, t, s) \leq \\ &\leq z(t, s) = 1 + \eta(t, s) \leq \left(1 - \frac{QT\gamma}{4} (t - s)\right)^{-1/\gamma}, \end{aligned}$$

которые приводят к оценкам (9). $\square$

Определим последовательность $u_k(x, t, s)$, $k = 0, 1, \dots$, формулами

$$\begin{aligned} u_0(x, t, s) &= 1, \\ u_k(x, t, s) &= 1 + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t, s)} q(\xi, \tau) u_{k-1}^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi, \quad (11) \\ k &= 1, 2, \dots, \quad t \leq s + x. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть условие (8) выполнено. Тогда последовательность $u_k(x, t, s)$ удовлетворяет оценке

$$0 \leq u_k(x, t, s) \leq \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(t-s)\right)^{-1/\gamma} \leq 2, \quad (12)$$

$$(x, t) \in G(T, s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. При $n = 0$ неравенство (12) очевидно. Оценим $u_1(x, t, s)$. Имеем

$$\begin{aligned} u_1(x, t, s) &= 1 + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) d\xi \leq \\ &\leq 1 + \frac{QT}{4} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \leq 1 + \frac{QT}{4} \int_s^t \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(\tau-s)\right)^{-(1+\gamma)/\gamma} d\tau = \\ &= \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(t-s)\right)^{-1/\gamma}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} u_1(x, t, s) &\geq 1 - \frac{QT}{4} \int_s^t \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(\tau-s)\right)^{-(1+\gamma)/\gamma} d\tau = \\ &= 2 - \left(1 - \frac{QT\gamma}{4}(t-s)\right)^{-1/\gamma} \geq 0. \end{aligned}$$

Оценки последующих приближений выполняются аналогично. $\square$

Следствие 1. Последовательность $u_k(x, t, s)$ является неотрицательной и ограниченной в области $G(T, s)$ при любом $s \in [0, T]$.

Введем область $G_T^* = \{(x, t, s) \mid (x, t) \in G(T, s), s \in [0, T]\}$.

Теорема 1. При выполнении условия (8) последовательность $\{u_n(x, t, s)\}$ равномерно сходится в области G_T^* и определяет в этой области непрерывную неотрицательную предельную функцию $u(x, t, s)$, которая является решением уравнения (7) в области $G(T, s)$ при любом $s \in [0, T]$.

Доказательство. Введём в рассмотрение разности

$$w_k(x, t, s) = u_k(x, t, s) - u_{k-1}(x, t, s), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из формул (11) следуют равенства

$$w_1(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) d\xi, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} w_k(x, t, s) &= u_k(x, t, s) - u_{k-1}(x, t, s) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) [u_{k-1}^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) - u_{k-2}^{\gamma+1}(\xi, \tau, s)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) w_{k-1}(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_{k-1}, u_{k-2}) d\xi, \\ & \qquad \qquad \qquad k = 2, 3, \dots, \quad (14) \end{aligned}$$

В (14) использовано представление

$$u_{k-1}^{\gamma+1}(x, t, s) - u_{k-2}^{\gamma+1}(x, t, s) = (\gamma+1) \int_{u_{k-2}(x, t, s)}^{u_{k-1}(x, t, s)} z^\gamma dz = w_{k-1}(x, t, s) R_\gamma(u_{k-1}, u_{k-2}),$$

здесь для краткости используется запись $w_{k-1}(x, t, s) R_\gamma(u_{k-1}, u_{k-2})$, которая подразумевает выражение вида

$$w_{k-1}(x, t, s) R_\gamma(u_{k-1}, u_{k-2}) \equiv w_{k-1}(x, t, s) R_\gamma(u_{k-1}(x, t, s), u_{k-2}(x, t, s)),$$

где

$$\begin{aligned} R_\gamma(u_{k-1}(x, t, s), u_{k-2}(x, t, s)) &= \\ &= (\gamma+1) \int_0^1 [\zeta u_{k-1}(x, t, s) + (1-\zeta) u_{k-2}(x, t, s)]^\gamma d\zeta \leq 2^\gamma (\gamma+1). \quad (15) \end{aligned}$$

Из (13) и (14) при $k = 2$ получаем

$$|w_1(x, t, s)| \leq \frac{TQ}{4} \int_s^t d\tau = \frac{TQ}{4} (t-s),$$

$$\begin{aligned}
|w_2(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) w_1(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_1, u_0)| d\xi \leq \\
&\leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^2 2^\gamma (1 + \gamma) \int_s^t (\tau - s) d\tau = 2^\gamma (1 + \gamma) \left(\frac{TQ}{4}\right)^2 \frac{(t - s)^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, имеет место неравенство

$$|w_k(x, t, s)| \leq [2^\gamma (1 + \gamma)]^{k-1} \left(\frac{TQ}{4}\right)^k \frac{(t - s)^k}{k!}, \quad (x, t) \in G(T, s). \quad (16)$$

Оценим функцию $w_{k+1}(x, t, s)$, опираясь на индукционное предположение (16). В результате получим

$$\begin{aligned}
|w_{k+1}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) w_k(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_k, u_{k-1})| d\xi \leq \\
&\leq [2^\gamma (1 + \gamma)]^k \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+1} \int_s^t \frac{(\tau - s)^k}{k!} d\tau = \\
&= [2^\gamma (1 + \gamma)]^k \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+1} \frac{(t - s)^{k+1}}{(k + 1)!}.
\end{aligned}$$

В силу метода математической индукции можем утверждать, что справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
|w_n(x, t, s)| &\leq [2^\gamma (1 + \gamma)]^{n-1} \left(\frac{TQ}{4}\right)^n \frac{(t - s)^n}{n!}, \\
&(x, t) \in G(T, s), \quad n = 2, 3, \dots \quad (17)
\end{aligned}$$

Из оценки (17) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t, s)$ в области G_T^* , что доказывает равномерную сходимость последовательности $u_n(x, t, s)$ в этой же области. Так как очевидно, что все $u_n(x, t, s)$ непрерывны в этой области, то и предел этой последовательности определяет непрерывную в области G_T^* функцию $u(x, t, s)$, которая является решением уравнения (7). Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям

$$0 \leq u(x, t, s) \leq 2, \quad (x, t) \in G_T^*.$$

□

Теорема 2. При выполнении условия (8) непрерывное в области $G(T, s)$ решение уравнения (7) единственно.

Доказательство. Предположим, что в области $G(T, s)$ существуют два решения $u_k(x, t, s)$, $k = 1, 2$, уравнения (7), которые являются непрерывными функциями. В силу леммы 1 эти решения ограничены постоянной 2. Обозначим $\tilde{u}(x, t, s) = u_1(x, t, s) - u_2(x, t, s)$, тогда имеет место оценка

$$|\tilde{u}(x, t, s)| \leq |u_1(x, t, s)| + |u_2(x, t, s)| \leq 4 \quad (18)$$

и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t, s) &= \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) [u_1^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) - u_2^{\gamma+1}(\xi, \tau, s)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) \tilde{u}(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_1, u_2) d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

в котором

$$|R_\gamma(u_1, u_2)| \leq 2^\gamma(\gamma + 1). \quad (20)$$

Из (19), в силу (20), получим оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) \tilde{u}(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_1, u_2)| d\xi \leq \\ &\leq 2^{1+\gamma}(1 + \gamma)QT \int_s^t d\tau = 2^\gamma(1 + \gamma)QT(t - s). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя (21), из (19) можем написать новую оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) \tilde{u}(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_1, u_2)| d\xi \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{QT2^\gamma(1 + \gamma)}{4} \right)^2 \int_s^t (\tau - s) d\tau = 4 \left(\frac{QT2^\gamma(1 + \gamma)}{4} \right)^2 \frac{(t - s)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Повторяя этот процесс итераций n раз, приходим к оценке

$$|\tilde{u}(x, t, s)| \leq 4 \left(\frac{TQ2^\gamma(1+\gamma)}{4} \right)^n \frac{(t-s)^n}{n!}. \quad (22)$$

Так как правая часть неравенства (22) равномерно стремится к нулю в области $G(T, s)$ при $n \rightarrow \infty$, то $\tilde{u}(x, t, s) = 0$ в области $G(T, s)$, т. е. $u_1(x, t, s) = u_2(x, t, s)$ для всех $(x, t) \in G(T, s)$. $\square$

Теорема 3. Пусть выполнено условие (8). Тогда решение уравнения (7) является функцией класса $C^1(G_T^*)$. Кроме того, $u_{xs} \in C(G_T^*)$.

Доказательство. Пусть $(x, t) \in G(T, s)$. Запишем уравнение (8) в виде суммы повторных интегралов.

Вначале рассмотрим случай (а): $t-x \leq (t+x+s)/2$ (см. рис. 1). В этом случае уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} u(x, t, s) = 1 + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (23) \end{aligned}$$

А теперь рассмотрим случай (b): $(t+x+s)/2 \leq t-x$. В этом случае уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} u(x, t, s) = 1 + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (24) \end{aligned}$$

При дифференцировании каждого из уравнений (23) и (24) по переменным x и t получим один и тот же результат:

$$\begin{aligned}
 u_t(x, t, s) = & -\frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau) u^{\gamma+1}(t-x-\tau, \tau, s) d\tau + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau) u^{\gamma+1}(x-t+\tau, \tau, s) d\tau + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau) u^{\gamma+1}(t+x-\tau, \tau, s) d\tau, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau) u^{\gamma+1}(t-x-\tau, \tau, s) d\tau - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau) u^{\gamma+1}(x-t+\tau, \tau, s) d\tau \\
 & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau) u^{\gamma+1}(t+x-\tau, \tau, s) d\tau. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Равенства (25) и (26) определяют непрерывные в G_T^* функции $u_t(x, t, s)$ и $u_x(x, t, s)$.

Покажем непрерывность функции $u_s(x, t, s)$ в той же области. Диффе-

ренцируя по s уравнения (23), (24), получим

$$\begin{aligned}
 u_s(x, t, s) = & -\frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{(t+x+s)/2} q(\tau-s, \tau) u^{\gamma+1}(\tau-s, \tau, s) d\tau + \\
 & + \frac{\gamma+1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi + \\
 & + \frac{\gamma+1}{2} \int_{t-x}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi + \\
 & + \frac{\gamma+1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi, \\
 & t-x \leq (t+x+s)/2, \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_s(x, t, s) = & -\frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{(t+x+s)/2} q(\tau-s, \tau) u^{\gamma+1}(\tau-s, \tau, s) d\tau + \\
 & + \frac{\gamma+1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi + \\
 & + \frac{\gamma+1}{2} \int_{t-x}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi + \\
 & + \frac{\gamma+1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi, \\
 & t-x \geq (t+x+s)/2. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Уравнения (27), (28) при $(x, t, s) \in G_T^*$ можно записать единообразно

следующим образом:

$$u_s(x, t, s) = -\frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{(t+x+s)/2} q(\tau-s, \tau) u^{\gamma+1}(\tau-s, \tau, s) d\tau + \\ + \frac{\gamma+1}{2} \iint_{D(x,t,s)} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) u_s(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad (x, t, s) \in G_T^*. \quad (29)$$

Уравнение (29) является интегральным уравнением Вольтерра по переменной t относительно функции $u_s(x, t, s)$. Ядро этого уравнения и свободный член непрерывны в G_T^* . Поэтому существуют единственные непрерывные решение этого уравнения. Следовательно, уравнение (29) определяет $u_s(x, t, s)$ как непрерывную функцию в G_T^* .

При дифференцировании уравнений (27), (28) по переменной x получим один и тот же результат

$$u_{sx}(x, t, s) = -\frac{1}{2} q\left(\frac{t+x-s}{2}, \frac{t+x+s}{2}\right) u^{\gamma+1}\left(\frac{t+x-s}{2}, \frac{t+x+s}{2}, s\right) - \\ - \frac{1}{2} q\left(\frac{t-x-s}{2}, \frac{t-x+s}{2}\right) u^{\gamma+1}\left(\frac{t-x-s}{2}, \frac{t-x+s}{2}, s\right) + \\ + \frac{\gamma+1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau) u^\gamma(t-x-\tau, \tau, s) u_s(t-x-\tau, \tau, s) d\tau - \\ - \frac{\gamma+1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau) u^\gamma(x-t+\tau, \tau, s) u_s(x-t+\tau, \tau, s) d\tau + \\ + \frac{\gamma+1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau) u^\gamma(t+x-\tau, \tau, s) u_s(t+x-\tau, \tau, s) d\tau, \\ (x, t, s) \in G_T^*. \quad (30)$$

Так как выражения, стоящие в правой части равенства (30) являются непрерывными функциями, то и выражение, стоящее в левой части этого равенства, также является непрерывной функцией в области G_T^* . Таким образом, функция $u_{sx}(x, t, s) \in C(G_T^*)$. $\square$

§ 3. Исследование обратной задачи

В обратной задаче известны при $x = 0$ данные Коши функции $u(x, t, s)$:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=0} = f(t, s), \quad (t, s) \in G_0(T), \\ G_0(T) = \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Как следует из теоремы 3, функция $f(t, s)$ и её производная $f_s(t, s)$ должны принадлежать классу $C(G_0(T))$. Кроме того, функция $f(t, s)$ должна удовлетворять условию $f(s, s) = 0$. Это необходимые условия разрешимости обратной задачи. Примем, что они выполнены.

Введём для удобства записи новые функции

$$v(x, t, s) := u_s(x, t, s), \quad F(t, s) = f_s(t, s). \quad (32)$$

Запишем уравнение (30) для функции $u_{sx}(x, t, s)$ при $x = 0$, используя данные Коши (31).

$$\begin{aligned} F(t, s) = -\frac{1}{2}q\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}\right)u^{\gamma+1}\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}, s\right) + \\ + (\gamma+1) \int_{(t+s)/2}^t q(t-\tau, \tau)u^\gamma(t-\tau, \tau, s)v(t-\tau, \tau, s) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

Заменим в (33) в интеграле переменную интегрирования τ на $\xi = t - \tau$. Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned} F(t, s) = -\frac{1}{2}q\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}\right)u^{\gamma+1}\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}, s\right) + \\ + (\gamma+1) \int_0^{(t-s)/2} q(\xi, t-\xi)u^\gamma(\xi, t-\xi, s)v(\xi, t-\xi, s) d\xi, \quad (t, s) \in G_0(T). \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что точка $((t-s)/2, (t+s)/2)$ при изменении t и s в $G_0(T)$ пробегает все точки области $G(T) = \{(x, t) \mid (0 \leq x \leq t \leq T-x)\}$.

Положим $\frac{t-s}{2} = x$, $\frac{t+s}{2} = t'$, тогда $t = x + t'$, $s = t' - x$ и уравнение (33) примет вид

$$F(x + t', t' - x) = -\frac{1}{2}q(x, t')u^{\gamma+1}(x, t', t' - x) + \\ + (\gamma + 1) \int_0^x q(\xi, x + t' - \xi)u^\gamma(\xi, x + t' - \xi, t' - x)v(\xi, x + t' - \xi, t' - x) d\xi, \\ (x, t) \in G(T, s). \quad (35)$$

Меняя t' на t , уравнение (35) можем записать следующим образом:

$$q(x, t) = -\frac{2F(x + t, t - x)}{u^{\gamma+1}(x, t, t - x)} \\ + \frac{2(\gamma + 1)}{u^{\gamma+1}(x, t, t - x)} \int_0^x q(\xi, x + t - \xi)u^\gamma(\xi, x + t - \xi, t - x)v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \\ (x, t) \in G(T, s). \quad (36)$$

Используя формулу Даламбера для уравнения (1) с данными Коши (2) и (4) при $x = 0$, запишем уравнение для функции $u(x, t, s)$. Оно имеет вид

$$u(x, t, s) = u_0(x, t, s) - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau)u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \quad (37)$$

в котором

$$u_0(x, t, s) = 1 + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} f(\tau, s) d\tau.$$

Дифференцируя уравнение (37) по переменной s , получим

$$v(x, t, s) = v_0(x, t, s) - \frac{\gamma + 1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau)u^\gamma(\xi, \tau, s)v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \\ (x, t, s) \in G_T^*, \quad (38)$$

в котором

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} F(\tau, s) d\tau.$$

Уравнения (36)–(38) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений для отыскания трёх функций $q(x, t)$, $u(x, t, s)$ и $v(x, t, s)$. Для дальнейшего, удобно преобразовать уравнение (36), записав его в виде

$$q(x, t) = q_0(x, t) + \frac{2F(x+t, t-x)[u^{\gamma+1}(x, t, t-x) - u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)]}{u^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)} + \\ + \frac{2(\gamma+1)}{u^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \int_0^x q(\xi, x+t-\xi)u^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x)v(\xi, x+t-\xi, t-x) d\xi, \\ (x, t) \in G(T, s), \quad (39)$$

в котором

$$q_0(x, t) = -\frac{2F(x+t, t-x)}{u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)}.$$

Рассмотрим класс функций $f(t, s)$:

$$\mathcal{F} = \{f \in C(G_0(T)) \mid f_s \in C(G_0(T)), |f(t, s)| \leq f_*, |F(t, s)| \leq F_*\}.$$

Тогда имеем

$$\left(1 - \frac{Tf_*}{2}\right) \leq u_0(x, t, s) \leq \left(1 + \frac{Tf_*}{2}\right), \quad |v_0(x, t, s)| \leq \frac{TF_*}{2}, \\ |q_0(x, t)| \leq \frac{2^{2+\gamma}F_*}{(2 - Tf_*)^{1+\gamma}}.$$

Выберем T из условия $Tf_* = 1$. Обозначим

$$M := \max \left\{ \frac{3}{2}, \frac{F_*}{2f_*}, 2^{2+\gamma}F_* \right\},$$

тогда

$$|q_0(x, t)| \leq M, \quad \frac{1}{2} \leq u_0(x, t, s) \leq M, \quad |v_0(x, t, s)| \leq M. \quad (40)$$

Теорема 4. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда существует положительное число $T_0 \leq T$ и единственная функция $q(x, t) \in C(G(T, s))$, такие, что решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условию (4) при $(t, s) \in G_0(T)$.

Доказательство. Запишем уравнения (37)–(39) в операторном виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}(\mathbf{g}), \quad (41)$$

где

$$\mathbf{g}(x, t, s) = (q(x, t), u(x, t, s), v(x, t, s)), \quad \mathbf{g}_0 = (q_0(x, t), u_0(x, t, s), v_0(x, t, s)).$$

Операторы $A_k(\mathbf{g})$, $k = 1, 2, 3$, определяются правыми частями уравнений (37)–(39):

$$A_1(\mathbf{g}) = q_0(x, t) + \frac{2F(x+t, t-x)[u^{\gamma+1}(x, t, t-x) - u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)]}{u^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)} +$$

$$+ \frac{2(\gamma+1)}{u^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \int_0^x q(\xi, x+t-\xi) u^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x) v(\xi, x+t-\xi, t-x) d\xi,$$

$$(x, t) \in G(T, s), \quad (42)$$

$$A_2(\mathbf{g}) = u_0(x, t, s) - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \quad (43)$$

$$A_3(\mathbf{g}) = v_0(x, t, s) - \frac{\gamma+1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi,$$

$$(x, t, s) \in G_T^*. \quad (44)$$

Уравнения (42)–(44) запишем следующим образом:

$$A_1(\mathbf{g}) - q_0(x, t) = \frac{2F(x+t, t-x)(u(x, t, s) - u_0(x, t, t-x))R_\gamma(u, u_0)}{u^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)} +$$

$$+ \frac{2(\gamma+1)}{u^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \int_0^x q(\xi, x+t-\xi) u^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x) v(\xi, x+t-\xi, t-x) d\xi,$$

$$(x, t) \in G(T, s), \quad (45)$$

$$A_2(\mathbf{g}) - u_0(x, t, s) = -\frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\tau d\xi,$$

$$(x, t, s) \in G_T^*, \quad (46)$$

$$A_3(\mathbf{g}) - v_0(x, t, s) = -\frac{\gamma+1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi,$$

$$(x, t, s) \in G_T^*. \quad (47)$$

Функция $R_\gamma(u, u_0)$ в (45) определяется аналогично функции $R_\gamma(u_{k-1}, u_{k-2})$:

$$R_\gamma(u(x, t, s), u_0(x, t, s)) = (\gamma + 1) \int_0^1 [\zeta u(x, t, s) + (1 - \zeta)u_0(x, t, s)]^\gamma d\zeta. \quad (48)$$

Покажем, что оператор $\mathbf{A}(\mathbf{g})$ является сжимающим на подходящем множестве функций при малом T .

Обозначим $\mathbf{C}(G_T^*)$ — пространство непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_T^*)} = \max \{ \|q\|_{C(G(T,s))}, \|u\|_{C(G_T^*)}, \|v\|_{C(G_T^*)} \}.$$

В силу (40), можем написать

$$\|\mathbf{g}_0\|_{\mathbf{C}(G_T^*)} \leq M. \quad (49)$$

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{C}(G_T^*)$ замкнутое множество

$$\mathcal{M}(T, M) := \{ \mathbf{g} \in \mathbf{C}(G_T^*) \mid \|q - q_0\|_{C(G(T,s))} \leq M, \\ \|u - u_0\|_{C(G_T^*)} \leq M, \|v - v_0\|_{C(G_T^*)} \leq M \}. \quad (50)$$

На этом множестве справедливы оценки

$$\|q\|_{C(G(T,s))} \leq 2M, \quad \|u\|_{C(G_T^*)} \leq 2M, \quad \|v\|_{C(G_T^*)} \leq 2M. \quad (51)$$

В силу (48), (49), (51) для функции $R_\gamma(u, u_0)$ справедлива оценка

$$|R_\gamma(u, u_0)| \leq (\gamma + 1)(2M)^\gamma. \quad (52)$$

Используя (37), можем написать следующие оценки:

$$|u(x, t, s) - u_0(x, t, s)| \leq \frac{T^2}{8}(2M)^{\gamma+2}, \quad (53)$$

$$u(x, t, s) \geq u_0(x, t, s) \left[1 - \frac{1}{2u_0(x, t, s)} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} |q(\xi, \tau)| |u|^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) d\tau d\xi \right] \geq \\ \geq u_0(x, t, s) \left[1 - \frac{T^2}{4}(2M)^{\gamma+2} \right]. \quad (54)$$

Если T удовлетворяет условию $T \leq \sqrt{\frac{3}{(2M)^{\gamma+2}}}$, тогда из (54) имеем

$$u(x, t, s) \geq 1/4, \quad (x, t, s) \in G_T^*. \quad (55)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$T \leq T_1 = \min \left\{ \frac{1}{f_*}, \sqrt{\frac{3}{(2M)^{\gamma+2}}} \right\}. \quad (56)$$

В силу (51)–(53), (55) из уравнений (42)–(44) получим оценки

$$\begin{aligned} |A_1(\mathbf{g}) - q_0(x, t)| &\leq \frac{2|F(x+t, t-x)| |u(x, t, s) - u_0(x, t, t-x)| |R_\gamma(u, u_0)|}{|u^{\gamma+1}(x, t, t-x) u_0^{\gamma+1}(x, t, t-x)|} + \\ &+ \frac{2(\gamma+1)}{|u^{\gamma+1}(x, t, t-x)|} \int_0^x |q(\xi, x+t-\xi)| |u^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x)| |v(\xi, x+t-\xi, t-x)| d\xi \leq \\ &\leq 2F_* 8^{\gamma+1} (1+\gamma) (2M)^\gamma \frac{T^2 (2M)^{\gamma+2}}{8} + T(\gamma+1) 4^{\gamma+1} (2M)^{\gamma+2} \leq \\ &\leq 8^\gamma (1+\gamma) (2M)^{\gamma+2} [2F_* (2M)^\gamma T^2 + 4T] =: C_1(M, \gamma, T)T, \\ &\quad (x, t) \in G(T, s), \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_2(\mathbf{g}) - u_0(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} |q(\xi, \tau)| |u^{\gamma+1}(\xi, \tau, s)| d\tau d\xi \leq \\ &\leq \frac{T^2}{8} (2M)^{\gamma+2} =: C_2(M, \gamma)T^2, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \quad (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_3(\mathbf{g}) - v_0(x, t, s)| &\leq \frac{\gamma+1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) u^\gamma(\xi, \tau, s) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi \leq \\ &\leq (\gamma+1) \frac{T^2}{8} (2M)^{\gamma+2} =: C_3(M, \gamma)T^2, \quad (x, t, s) \in G_T^*. \quad (59) \end{aligned}$$

Выберем число T_2 из условий:

$$T_2 \leq T_1, \quad C_1(M, \gamma, T_2)T_2 \leq 1, \quad C_2(M, \gamma)T_2^2 \leq 1, \quad C_3(M, \gamma)T_2^2 \leq 1.$$

Тогда при $T \leq T_2$ оператор $\mathbf{A}$ переводит множество $\mathcal{M}(T, M)$ в себя.

В дальнейшем будем полагать, что $T \leq T_2$.

Покажем теперь, что оператор $\mathbf{A}(\mathbf{g})$ является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T, M)$ при возможно дальнейшем уменьшении T . Пусть $\mathbf{g}_1 = (q_1, u_1, v_1)$ и $\mathbf{g}_2 = (q_2, u_2, v_2)$ — два набора функций, принадлежащих $\mathcal{M}(T, M)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{q}(x, t) &= q_1(x, t) - q_2(x, t), \\ \bar{u}(x, t, s) &= u_1(x, t, s) - u_2(x, t, s), \quad \bar{v}(x, t, s) = v_1(x, t, s) - v_2(x, t, s), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\|\bar{\mathbf{g}}\| := \|\bar{\mathbf{g}}\|_{C(G_T^*)} = \max \left\{ \max_{(x,t) \in G(T,s)} |\bar{q}(x, t)|, \max_{(x,t,s) \in G_T^*} |\bar{u}(x, t, s)|, \max_{(x,t,s) \in G_T^*} |\bar{v}(x, t, s)| \right\}. \quad (61)$$

Тогда, в силу (42)–(44), можно записать соотношения для разностей в виде:

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2) &= \frac{2F(x+t, t-x)}{u_1^{\gamma+1}(x, t, s)u_2^{\gamma+1}(x, t, s)} \bar{u}(x, t, s) R_\gamma(u_1, u_2) + \\ &+ 2(\gamma+1) \frac{\bar{u}(x, t, s) R_\gamma(u_2, u_1)}{u_1^{\gamma+1}(x, t, s)u_2^{\gamma+1}(x, t, s)} \times \\ &\times \int_0^x q_1(\xi, x+t-\xi) u_1^\gamma(\xi, x+t-\xi, s) v_1(\xi, x+t-\xi, s) d\xi + \\ &+ \frac{2(\gamma+1)}{u_2^{\gamma+1}(x, t, s)} \int_0^x [\bar{q}(\xi, x+t-\xi) u_1^\gamma(\xi, x+t-\xi, s) v_1(\xi, x+t-\xi, s) + \\ &+ q_2(\xi, x+t-\xi) \bar{u}(\xi, x+t-\xi, s) R_{\gamma-1}(u_1, u_2) v_1(\xi, x+t-\xi, s) + \\ &+ q_2(\xi, x+t-\xi) u_2^\gamma(\xi, x+t-\xi, s) \bar{v}(\xi, x+t-\xi, s)] d\xi, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} A_2(\mathbf{g}_1) - A_2(\mathbf{g}_2) &= -\frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} [\bar{q}(\xi, \tau) u_1^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) + \\ &+ q_2(\xi, \tau) \bar{u}(\xi, \tau, s) R_\gamma(u_1, u_2)] d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} A_3(\mathbf{g}_1) - A_3(\mathbf{g}_2) &= -\frac{\gamma+1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} [\bar{q}(\xi, \tau) u_1^\gamma(\xi, \tau, s) v_1(\xi, \tau, s) + \\ &+ q_2(\xi, \tau) \bar{u}(\xi, \tau, s) R_{\gamma-1}(u_1, u_2) v_1(\xi, \tau, s) + \\ &+ q_2(\xi, \tau) u_2^\gamma(\xi, \tau, s) \bar{v}(\xi, \tau, s)] d\tau. \end{aligned} \quad (64)$$

Для функции $R_\gamma(u_2, u_1)$ справедлива оценка, подобная (52)

$$|R_\gamma(u_1, u_2)| \leq (\gamma + 1)(2M)^\gamma. \quad (65)$$

В силу (51), (65), получаем для этих разностей следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\bar{u}(x, t, s)| &= |A_2(\mathbf{g}_1) - A_2(\mathbf{g}_2)| \leq \\ &\leq \frac{T^2}{8}(2M)^{\gamma+1}(\gamma + 2)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| =: C_4 T^2 \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} |A_3(\mathbf{g}_1) - A_3(\mathbf{g}_2)| &\leq \frac{(\gamma + 1) T^2}{2} \frac{T^2}{4} (2M)^{\gamma+1} (\gamma + 2) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| = \\ &=: C_5 T^2 \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|. \end{aligned} \quad (67)$$

Используя (66), получим оценку для разности $A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2)$:

$$\begin{aligned} |A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2)| &\leq \left[2F_* 16^{\gamma+1} (2M)^\gamma (\gamma + 1) C_4 T^2 \right. \\ &\quad + 2(\gamma + 1)(2M)^\gamma (\gamma + 1) 16^{\gamma+1} \frac{T}{2} (2M)^{\gamma+2} + \\ &\quad \left. + 2(\gamma + 1) 4^{\gamma+1} \frac{T}{2} (2M)^{\gamma+1} (\gamma + 2) \right] \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| = \\ &=: (C_6 T^2 + C_7 T) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|. \end{aligned} \quad (68)$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$. Выберем T_0 так, чтобы выполнялись условия

$$T_0 \leq T_2, \quad C_4 T_0^2 \leq \rho, \quad C_5 T_0^2 \leq \rho, \quad (C_6 T_0^2 + C_7 T_0) \leq \rho.$$

Тогда выполнены неравенства

$$\|A_k(\mathbf{g}_1) - A_k(\mathbf{g}_2)\| \leq \rho \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|, \quad k = 1, 2, 3,$$

которые означают, что $A(\mathbf{g})$ является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T_0, M)$. В силу принципа Банаха сжимающих отображений на множестве $\mathcal{M}(T_0, M)$ существует единственное решение операторного уравнения (41). $\square$

Теорема 5. Пусть функции $q_k(x, t)$, $k = 1, 2$, являются решениями обратной задачи (1)–(4) с данными $f_k(t, s) \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2$, соответственно. Пусть, кроме того, выполняются условия

$$\frac{1}{2} \leq u_{k0}(x, t, s) = 1 + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} f_k(\tau, s) d\tau \leq M, \quad 1/4 \leq u_k(x, t, s) \leq M, \quad (69)$$

$$|u_k(x, t, s) - u_{k0}(x, t, s)| \leq M, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \quad k = 1, 2,$$

с некоторой положительной постоянной M . Тогда найдётся постоянная C такая, что имеет место оценка

$$\|q_1 - q_2\|_{C(G(T,s))} \leq C(\|f_1 - f_2\|_{C(G_0(T))} + \|f_{1s} - f_{2s}\|_{C(G_0(T))}). \quad (70)$$

Доказательство. Решение обратной задачи (1)–(4) с данными $f_k(t, s)$, $k = 1, 2$, обозначим $q_k(x, t)$, $u_k(x, t, s)$, $v_k(x, t, s)$, $k = 1, 2$. Соответствующие им функции $q_0(x, t)$, $u_0(x, t, s)$, $v_0(x, t, s)$ в уравнениях (42)–(44) обозначим $q_{k0}(x, t)$, $u_{k0}(x, t, s)$, $v_{k0}(x, t, s)$. Пусть $F_k(t, s) = f_{ks}(t, s)$, $k = 1, 2$, и

$$\begin{aligned} |q_k(x, t)| &\leq M, \quad (x, t) \in G(T, s), \\ |u_k(x, t, s)| &\leq M, \quad |v_k(x, t, s)| \leq M, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (71)$$

Рассмотрим разности

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, t) &= q_1(x, t) - q_2(x, t), \quad \tilde{u}(x, t, s) = u_1(x, t, s) - u_2(x, t, s), \\ \tilde{v}(x, t, s) &= v_1(x, t, s) - v_2(x, t, s), \quad \tilde{f}(t, s) = f_1(t, s) - f_2(t, s), \\ \tilde{F}(t, s) &= F_1(t, s) - F_2(t, s) \end{aligned}$$

и выразим разности $q_{10}(x, t) - q_{20}(x, t)$, $u_{10}(x, t, s) - u_{20}(x, t, s)$, $v_{10}(x, t, s) - v_{20}(x, t, s)$ через функции $\tilde{f}(t, s)$ и $\tilde{F}(t, s)$

$$\tilde{u}_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \tilde{f}(\tau, s) d\tau, \quad \tilde{v}_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \tilde{F}(\tau, s) d\tau, \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0(x, t) &= -\frac{2}{u_{10}^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_{20}^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \times \\ &\times [\tilde{F}(x+t, t-x)u_{20}(x, t, t-x) + F_2(x+t, t-x)\tilde{u}_0(x, t, t-x)R_\gamma(u_{20}, u_{10})]. \end{aligned}$$

В уравнениях (42)–(44) перейдём к разностям $\tilde{q}(x, t)$, $\tilde{u}(x, t, s)$, $\tilde{v}(x, t, s)$, $\tilde{f}(t, s)$, $\tilde{F}(t, s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, t) &= \tilde{q}_0(x, t) + \\ &+ 2\tilde{F}(x+t, t-x) \frac{(u_1(x, t, t-x) - u_{10}(x, t, t-x))R_\gamma(u_1, u_{10})}{u_1^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_{10}^{\gamma+1}(x, t, t-x)} + \\ &+ \frac{2F_2(x+t, t-x)}{u_1^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_{10}^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [\tilde{u}(x, t, t-x)R_\gamma(u_1, u_2) - \tilde{u}_0(x, t, t-x)R_\gamma(u_{10}, u_{20})] - \\
& - \frac{2F_2(x+t, t-x)(u_2(x, t, t-x) - u_{20}(x, t, t-x))R_\gamma(u_2, u_{20})}{u_1^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_{10}^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_2^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_{20}^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \times \\
& \times [\tilde{u}(x, t, t-x)R_\gamma(u_1, u_2)u_{10}^{\gamma+1}(x, t, t-x) + \\
& + u_2^{\gamma+1}(x, t, t-x)\tilde{u}_0(x, t, t-x)R_\gamma(u_{10}, u_{20})] - \\
& - \frac{2(\gamma+1)\tilde{u}(x, t, t-x)R_\gamma(u_1, u_2)}{u_1^{\gamma+1}(x, t, t-x)u_2^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \times \\
& \times \int_0^x q_1(\xi, x+t-\xi)u_1^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x)v_1(\xi, x+t-\xi, t-x) d\xi + \\
& + \frac{2(\gamma+1)}{u_2^{\gamma+1}(x, t, t-x)} \int_0^x [\tilde{q}(\xi, x+t-\xi)u_1^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x)v_1(\xi, x+t-\xi, t-x) + \\
& + q_2(\xi, x+t-\xi)\tilde{u}(\xi, x+t-\xi, t-x)R_{\gamma-1}(u_1, u_2)v_1(\xi, x+t-\xi, t-x) + \\
& + q_2(\xi, x+t-\xi)u_2^\gamma(\xi, x+t-\xi, t-x)\tilde{v}(\xi, x+t-\xi, t-x)] d\xi, \\
& (x, t) \in G(T, s), \quad (73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, t, s) = \tilde{u}_0(x, t, s) - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} [\tilde{q}(\xi, \tau)u_1^{\gamma+1}(\xi, \tau, s) + \\
+ q_2(\xi, \tau)\tilde{u}(\xi, \tau, s)R_\gamma(u_1, u_2)] d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \quad (74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(x, t, s) = \tilde{v}_0(x, t, s) - \frac{\gamma+1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} [\tilde{q}(\xi, \tau)u_1^\gamma(\xi, \tau, s)v_1(\xi, \tau, s) + \\
+ q_2(\xi, \tau)\tilde{u}(\xi, \tau, s)R_{\gamma-1}v_1(\xi, \tau, s) + q_2(\xi, \tau)u_2^\gamma(\xi, \tau, s)\tilde{v}(\xi, \tau, s)] d\tau d\xi, \\
(x, t, s) \in G_T^*. \quad (75)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_0(x) = \max \left\{ \max_{t \in [x, T-x]} |\tilde{q}_0(x, t)|, \right. \\
\left. \max_{0 < s \leq t \leq T} |\tilde{u}_0(x, t, s)|, \max_{0 < s \leq t \leq T} |\tilde{v}_0(x, t, s)| \right\}, \quad x \in [0, T/2],
\end{aligned}$$

$$\tilde{z}(x) = \max \left\{ \max_{t \in [x, T-x]} |\tilde{q}(x, t)|, \right.$$

$$\max_{0 < s \leq t \leq T} |\tilde{u}(x, t, s)|, \max_{0 < s \leq t \leq T} |\tilde{v}(x, t, s)|\}, \quad x \in [0, T/2].$$

В силу (69) и (71) имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq u_{k0}(x, t, s) \leq M, \quad 1/4 \leq u_k(x, t, s) \leq M, \quad \|u_k - u_{k0}\|_{C(G_T^*)} \leq M, \\ \|q_k\|_{C(G(T, s))} &\leq M, \quad \|u_k\|_{C(G_T^*)} \leq M, \quad \|v_k\|_{C(G_T^*)} \leq M, \quad k = 1, 2, \\ |R_\gamma(u_k, u_{k0})| &\leq M^\gamma(\gamma + 1), \quad |R_\gamma(u_1, u_2)| \leq M^\gamma(\gamma + 1), \\ |R_\gamma(u_{20}, u_{10})| &\leq M^\gamma(\gamma + 1). \end{aligned} \quad (76)$$

Используя (76), из (72) получим оценки для функций $q_0(x, t)$, $u_0(x, t, s)$, $v_0(x, t, s)$:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_0(x, t, s)| &\leq \frac{T}{2} \|\tilde{f}\|, \quad |\tilde{v}_0(x, t, s)| \leq \frac{T}{2} \|\tilde{F}\|, \\ |\tilde{q}_0(x, t)| &\leq 4^{\gamma+1} \|\tilde{F}\| + F_* 4^{\gamma+1} M^\gamma(\gamma + 1) \frac{T}{2} \|\tilde{f}\|. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что

$$\tilde{z}_0(x) \leq C_0^*(\|\tilde{f}\| + \|\tilde{F}\|), \quad x \in [0, T/2], \quad (77)$$

где $C_0^* = C_0^*(M, \gamma, F_*, T)$. Из равенств (74)–(75) получаем оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, t, s)| &\leq \frac{T}{2} \|\tilde{f}\| + \frac{T}{2} \int_0^x M^{\gamma+1}(\gamma + 2) \tilde{z}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \tilde{z}_0(x) + C_1^*(M, \gamma, T) \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t, s) \in G_T^*, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x, t, s)| &\leq \frac{T}{2} \|\tilde{F}\| + \frac{(\gamma + 1)T}{2} \int_0^x M^{\gamma+1}(\gamma + 2) \tilde{z}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \tilde{z}_0(x) + C_2^*(M, \gamma, T) \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t, s) \in G_T^*. \end{aligned} \quad (79)$$

При получении оценки для функции $\tilde{q}(x, t)$ воспользуемся оценками (78), (79). В результате получим оценку вида

$$|\tilde{q}(x, t)| \leq \tilde{z}_0(x) + C_{31}(M, \gamma) \|\tilde{F}\| +$$

$$\begin{aligned}
& + C_{32}(M, \gamma, F_*, T) \tilde{z}_0(x) + C_3^*(M, \gamma) \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi \leq \\
& \leq C_{30}(M, \gamma, F_*, T) \tilde{z}_0(x) + C_3^*(M, \gamma) \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in G(T, s). \quad (80)
\end{aligned}$$

Из оценок (78)–(80) получим итоговое неравенство

$$\tilde{z}(x) \leq C_{00}(M, \gamma, F_*, T) \tilde{z}_0(x) + C^*(M, \gamma) \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in G(T, s).$$

Используя неравенство Гронуолла — Белмана [16] и неравенство (77), получаем оценку (70) с постоянной

$$C = C_{00}(M, \gamma, F_*, T) C_0^* \exp \{C^*(M, \gamma) T/2\}.$$

□

Следствие 2. Если решение обратной задачи существует для $q \in G(T_*, s)$, то оно единственно и устойчиво по данным обратной задачи.

Список литературы

1. *Stefanov P.D.* Uniqueness of the inverse scattering problem for the wave equation with a potential depending on time // *Inverse Problems* 1988. V. 4. P. 913–920.
2. *Hu G., Kian Ya.* Determination of singular time-dependent coefficients for wave equations from full and partial data // *Inverse Problems and Imaging*. 2018. V. 12, N 3. P. 745–772; DOI: 10.3934/ipi.2018032
3. *Ben Aicha I.* Stability estimate for hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficient // *Inverse Problems*. 2015. V. 31. Article number 125010; arXiv:1506.01935v1 [math.AP] 5 Jun 2015
4. *Feizmohammadi A., Kian Y.* Recovery of nonsmooth coefficients appearing in anisotropic wave equations // *SIAM J. Math. Anal.* 2019. V. 51, Iss. 6. P. 4953–4976; DOI: 10.1137/19M1251394
5. *Feizmohammadi A.* An inverse boundary value problem for isotropic nonautonomous heat flows // *Mathematische Annalen*/ 2024. V. 388. P. 1569–1607; DOI: 10.1007/s00208-022-02559-6

6. Borcea L., Garnier J., Solna K. Sound propagation in a weakly turbulent flow waveguide // *SIAM J. Appl. Math.*. 2019. V. 79, N 6. P. 2663–2687.
7. Borcea L., Garnier J., Solna K. Wave propagation and imaging in moving random media, Multiscale // *Modeling and Simulations*. 2019. V. 17. P. 31–67.
8. Borcea L., Callaghan T., Papanicolaou G. Motion estimation and imaging of complex scenes with synthetic aperture radar // *Inverse Problems*. 2013. V. 29. Article number 054011.
9. Martorella M., Gelli S., Bacci A. Ground moving target imaging via SDAP-ISAR processing: review and new trends // *Sensors*. 2021. V. 21. Article number 2391; DOI: 10.3390/s21072391
10. Klibanov M.V., Li J., Romanov V.G., Yang Z. Carleman Numerical Method for Imaging of Moving Targets // arXiv: 2512.18361, 2025.
11. Liu B., Saksala T., Yan L. Partial data inverse problem for hyperbolic equation with time-dependent damping coefficient and potential // *J. Spectr. Theory*. 2025, V. 15. P. 123–147; DOI: 10.4171/JST/547
12. Kian Y. Recovery of time-dependent damping coefficients and potentials appearing in wave equations from partial data // *SIAM J. Math. Anal.* 2016. V. 48, N 6. P. 4021–4046; <https://hal.science/hal-01295818v2>
13. Kian Y. Stability in the determination of a time-dependent coefficient for wave equations from partial data // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. V. 436, N 1. P. 408–428; <https://hal.science/hal-01011051v3>
14. Bellassoued M., Ben Aicha I. Uniqueness for an inverse problem for a dissipative wave equation with time dependent coefficient // *Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*. 2016. V. 23; <https://hal.science/hal-01312954v2>
15. Романов В.Г., Бугуева Т.В. Обратная задача для волнового уравнения с потенциалом, зависящим от пространственной переменной и времени // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2026. Т. 29, N 1. С. 79–93.
16. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

References

1. *Stefanov P.D.* Uniqueness of the inverse scattering problem for the wave equation with a potential depending on time // *Inverse Problems* 1988. V.4. P.913–920.
2. *Hu G., Kian Ya.* Determination of singular time-dependent coefficients for wave equations from full and partial data // *Inverse Problems and Imaging*. 2018. V. 12, N 3. P. 745–772; DOI: 10.3934/ipi.2018032
3. *Ben Aicha I.* Stability estimate for hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficient // *Inverse Problems*. 2015. V.31. Article number 125010; arXiv:1506.01935v1 [math.AP] 5 Jun 2015
4. *Feizmohammadi A., Kian Y.* Recovery of nonsmooth coefficients appearing in anisotropic wave equations // *SIAM J. Math. Anal.* 2019. V. 51, Iss. 6. P. 4953–4976; DOI: 10.1137/19M1251394
5. *Feizmohammadi A.* An inverse boundary value problem for isotropic nonautonomous heat flows // *Mathematische Annalen*/ 2024. V.388. P.1569–1607; DOI: 10.1007/s00208-022-02559-6
6. *Borcea L., Garnier J., Solna K.* Sound propagation in a weakly turbulent flow waveguide // *SIAM J. Appl. Math.*. 2019. V. 79, N 6. P. 2663–2687.
7. *Borcea L., Garnier J., Solna K.* Wave propagation and imaging in moving random media, Multiscale // *Modeling and Simulations*. 2019. V.17. P.31–67.
8. *Borcea L., Callaghan T., Papanicolaou G.* Motion estimation and imaging of complex scenes with synthetic aperture radar // *Inverse Problems*. 2013. V. 29. Article number 054011.
9. *Martorella M., Gelli S., Bacci A.* Ground moving target imaging via SDAP-ISAR processing: review and new trends // *Sensors*. 2021. V.21. Article number 2391; DOI: 10.3390/s21072391
10. *Klibanov M.V., Li J., Romanov V.G., Yang Z.* Carleman Numerical Method for Imaging of Moving Targets // arXiv: 2512.18361, 2025.
11. *Liu B., Saksala T., Yan L.* Partial data inverse problem for hyperbolic equation with time-dependent damping coefficient and potential // *J. Spectr. Theory*. 2025, V. 15. P. 123–147; DOI: 10.4171/JST/547
12. *Kian Y.* Recovery of time-dependent damping coefficients and potentials appearing in wave equations from partial data // *SIAM J. Math. Anal.* 2016. V. 48, N 6. P. 4021–4046; <https://hal.science/hal-01295818v2>

13. Kian Y. Stability in the determination of a time-dependent coefficient for wave equations from partial data // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. V. 436, N 1. P. 408–428; <https://hal.science/hal-01011051v3>
14. Bellassoued M., Ben Aicha I. Uniqueness for an inverse problem for a dissipative wave equation with time dependent coefficient // *Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées.* 2016. V. 23; <https://hal.science/hal-01312954v2>
15. Romanov V.G., Bugueva T.V. The inverse problem for a wave equation with a potential depending on a spatial variable and time // *Sib. Zhurn. Indust. Mat.* 2026. V. 29, N 1. P. 79–93 (in Russian).
16. Bellman R. Stability Theory of Differential Equations. N. Y.: McGraw-Hill, 1953.

Информация об авторах

Владимир Гаврилович Романов, академик РАН, доктор физико -
- математических наук, профессор
SPIN 1899-5514 AuthorID: 5550
Scopus Author ID 55560964700 WoS ID: F-9215-2019

Татьяна Владимировна Бугуева, кандидат физико-математических
наук, доцент
SPIN 7005-3106 AuthorID: 15085
Scopus Author ID 6508066568

Author Information

Vladimir G. Romanov, Academician of the RAS, Doctor of Mathematics,
Professor
SPIN 1899-5514 AuthorID: 5550
Scopus Author ID 55560964700

Tatiana V. Bugueva, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 7005-3106 AuthorID: 15085
Scopus Author ID 6508066568

*Статья поступила в редакцию 14.05.2026;
одобрена после рецензирования 28.06.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 14.05.2026;
approved after reviewing 28.06.2026; accepted for publication 06.08.2026*